Aversión, desasosiego, ansiedad, antipatía, preocupación… todas estas y otras muchas son las sensaciones que la palabra “matemáticas” provoca, por lo general, en cualquier adolescente. El objetivo es mostrar que las Matemáticas son una ciencia tan cercana a nuestra vida que la hallamos por doquier: un copo de nieve, el carnet de identidad, la clave del correo electrónico, un campo de fútbol…

¿El gancho? Lucas, joven adolescente que va encontrando a lo largo de los meses de un curso escolar aspectos de las Matemáticas que nunca antes le habían llamado la atención.

¿La herramienta? El formato que caracteriza a la **Editorial Filarias**: una primera parte narrativa (en la que Lucas comparte con nosotros su entorno) y un glosario final independiente que permite la explicación científica y más rigurosa de ciertos términos.

¿El desafío? Transformar la aversión en atracción, el desasosiego en interés, la ansiedad en curiosidad, la preocupación en investigación…

Capítulo 1 JULIO: El comienzo del verano

1. Jugando con números en el campamento.

“Lucas, tengo un regalo para ti”. Eso me dijo mi hermana Emilse cuando llegué del instituto con las notas. “Es un cuaderno en blanco. Escribe en él tus experiencias, impresiones, sentimientos... todo aquello que consideres importante en tu vida”. Me dio un beso y se fue con un “nos vemos, Lucas”. Yo no sabía si reír o llorar. ¡Un cuaderno a final de curso! ¿Es que con 30 años uno ya no sabe qué es el PC FÚTBOL 2005? Se conoce que toda esa filosofía de las ONGs de la que vive no le da para comprender las necesidades reales de un chico de quince años. Sin embargo, en la lista de cosas que debía llevarme al campamento aparecía “cuaderno y bolígrafos” y pensé, mira por dónde voy a dar uso al librillo [...]

Capítulo 2 AGOSTO: Matemáticas en el pueblo

2. Música, frenos y despedida.

[...] Anoche decidimos salir a cenar Helena, Pedro y yo. El resto ya se había marchado y no queríamos pasar la última noche de Agosto cada uno en su casa, recordando las aventuras del verano. Así que ni cortos ni perezosos nos fuimos a “El Fogón”, un restaurante típico del pueblo bastante barato. Cuando pedimos la cuenta nos pasó una cosa curiosa. La factura sumaba 30 euros, con lo cual cada uno de nosotros puso un billete de 10 y nos miramos satisfechos de lo bien que habíamos comido y lo poco que nos había costado. En el momento en que nos levantábamos de la mesa, se acercó el camarero y deshaciéndose en mil disculpas nos dice que ha cometido un error y que no eran 30 euros sino 25, con lo cual nos dejó 5 euros de vuelta sobre la mesa. Como repartirnos ese dinero entre los tres no era fácil, decidimos quedarnos con un euro cada uno y los dos que sobraban dejarlos de propina. Y así, más satisfechos todavía, abandonamos el local. Íbamos caminando cuando Helena se para de repente nos mira con cara rara y dice: “¡Oye! Pusimos 10 euros sobre la mesa, ¿no?, y nos han devuelto uno, con lo cual hemos pagado 9 euros por cabeza...”- a lo que nosotros asentimos sin dudar- “... pero entonces 9 por 3 son 27 euros, más los 2 que le dejamos de propina suman 29, ¿qué ha pasado con el euro que falta?”. Nos quedamos mudos, sabíamos que ninguno de nosotros lo tenía, eso estaba claro.

Capítulo 3 SEPTIEMBRE: Opción B, las matemáticas del instituto

2. Matemáticas y sistemas electorales.

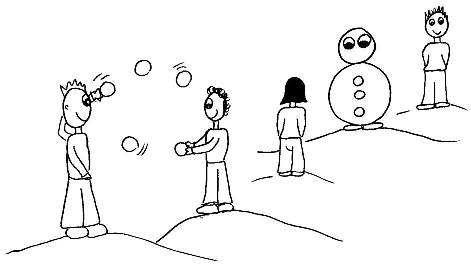
Durante esa semana de excitación de los primeros días, reencuentros y novedades por contar, fuimos pasando a la tradición de la vuelta a los libros, los deberes y el día a día del curso escolar. Pero aún nos quedaba un acontecimiento importante que se salía de la rutina: las elecciones de delegado. Esperaríamos quince días para celebrarlas, aunque antes de ello Rodrigo nos encargó un pequeño trabajo en grupo: matemáticas y sistemas electorales. Debíamos investigar sobre los diferentes procedimientos de *asignación de escaños*[(22)], existentes en los países democráticos para elegir a sus representantes, explicar brevemente la teoría e ilustrarla con algún ejemplo. Fue la excusa perfecta para formar equipo con María, la chica más guapa de la clase. [...] ¡Horror! Ahora lo veía todo claro. El malvado profesor se las había ingeniado para que la elección de delegado, tradicional excusa para perder una clase, se hubiera convertido en una lección de matemáticas. Había que reconocer que el tipo no se las ingeniaba mal. Era evidente que el sistema de elección utilizado podía influir en la decisión final y que ningún método es

mejor que otro. Optamos por el sistema tradicional en estos casos: mayoría simple en la primera votación.
Asignación de escaños [22]**:** el objetivo que persigue el profesor de matemáticas con este trabajo de investigación es conseguir que los alumnos comprendan el papel que las matemáticas desempeñan en el proceso de elección de los representantes de una nación y hacerles ver que no hay un único método que sea la panacea en dicho proceso. Uno de los organismos que representan al pueblo español es el Congreso de los Diputados, que consta de 350 miembros. Para garantizar que las 50 provincias tengan Diputados, se asignan 2 a cada una de ellas y 1 a cada una de las ciudades de Ceuta y Melilla. En definitiva, tendremos asignados 102 escaños, por tanto quedarían 248 por distribuir. Pero, ¿cómo se reparten esos 248 escaños restantes? [...]

Capítulo 6 DICIEMBRE: Matemáticas blancas

1. La nieve y los fractales.

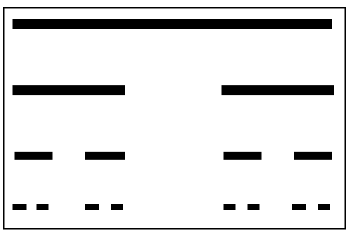
[...] Lola, la profesora de Historia, Rodrigo y otros docentes más tuvieron la genial idea (de vez en cuando se les ocurre algo interesante, hay que reconocerlo) de organizar una excursión a una estación de esquí. Nada más bajarnos del autobús empezaron las bromas. Alguien sacudió las ramas del árbol bajo el que estábamos agrupando los equipajes y de repente un montón de *nieve*[42] cayó sobre nuestras cabezas. Rápidamente nos organizamos en grupos, buscamos cobijo tras las pilas de equipajes y los coches y comenzó una verdadera guerra blanca. ¡Fue divertido ver a los profesores lanzándose bolas de nieve unos contra otros! Alguno incluso con más fuerza que cualquiera de nosotros…



Nieve [42]**:** fijémonos en la forma curiosa que tiene un copo de nieve. Aparentemente es una figura irregular, pero un observador avispado enseguida apreciará que su aspecto siempre es el mismo independientemente de la escala utilizada. Estas curiosas formas geométricas reciben un nombre: fractales. Los orígenes de la historia de la geometría fractal hay que localizarlos a finales del siglo XIX, cuando matemáticos como Cantor, Peano, Hilbert, Sierpinski y Koch crearon las siguientes figuras:

- Polvo de Cantor: Consideremos el intervalo $A_1 = [0,1]$, lo dividimos en tres partes iguales y eliminamos la del medio.

Formamos $A_2 = [0, 1/3] \cup [2/3,1]$, dividimos cada subintervalo en tres partes iguales y quitamos de cada uno la del medio.
Formamos $A_3 = [0, 1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$… y repetimos el procedimiento indefinidamente tal que:



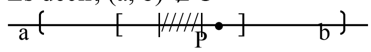
$$A_{n+1} \subset A_n \ \forall n > 0$$

$$C = \text{Conjunto de Cantor} = \bigcap_{n\in N} A_n$$

Propiedades:
1.- Es no vacío y compacto: al menos están los extremos de los intervalos cerrados y es intersección numerable de compactos.
2.- Es de medida nula, pues está recubierto por un intervalo de longitud 1; dos intervalos de longitud 1/3 cada uno (2/3 en total); cuatro intervalos de longitud total 4/9, y así sucesivamente, tomando un número

natural n suficientemente grande resulta que C estará recubierto por 2^n intervalos de longitud total $(2/3)^n$. Cuando n tiende a infinito (∞), esta longitud tiende a 0.

3.- No contiene intervalos (es decir, tiene interior vacío). Veámoslo: sea (a, b) un intervalo que contiene un punto del conjunto de Cantor. Entonces, por la construcción del mismo, en cada etapa n-ésima existirá un intervalo de los que forman A_n que contiene al punto (y que a su vez estará contenido en (a, b)). Pero no olvidemos que la parte de central de esos intervalos no está en el conjunto de Cantor, por tanto (a, b) contiene puntos que no pertenecen a C. Es decir, $(a, b) \not\subset C$



4.- Es no numerable: veamos en primer lugar que hay tantos elementos en C como sucesiones de ceros y doses. Es decir:

$$C = \{\, 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \;/\; a_i = 0 \text{ ó } 2 \;\forall i \,\}$$

Para ello basta considerar que cada elemento de C se puede describir como una sucesión de este tipo: si el punto pertenece al subintervalo [0, 1/3] tomamos $a_1 = 0$ y si es de [2/3, 1], $a_1 = 2$. Suponiendo que $a_1 = 0$, a continuación seleccionamos $a_2 = 0$ si el elemento está en [0, 1/9] o bien $a_2 = 2$ si está en [2/9, 1/3]; y así sucesivamente... Y recíprocamente: toda sucesión de esta forma se corresponde con un elemento de C siguiendo el mismo razonamiento pero en sentido contrario.

En segundo lugar, supongamos que C fuese numerable. Entonces todos sus elementos los podríamos escribir en un listado:

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0,a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots & \\ a_2 = 0,a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots & \text{tal que } a_{ij} \in \{0, 2\} \;\forall i,j \\ a_3 = 0,a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots & \\ a_4 = 0,a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44} \ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Sin embargo el elemento $b = 0,a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} \ldots$ no está entre ellos pero sí es una de las sucesiones anteriores. Como esto no puede ser, concluimos que C es no numerable. [...]

Capítulo 8 FEBRERO: Carnaval matemático

1. El desfile.

Apenas nos habíamos recuperado de las fiestas navideñas, aún estábamos bajo los efectos de las uvas y el champán, cuando Rodrigo nos propuso una interesante actividad. ¿Nos gustaría organizar una comparsa para el desfile del carnaval? [...] El tema de los disfraces sería “Alicia en el País de las Matemáticas” [...]

“¡Ay, qué rompecabezas es todo esto! Voy a probar si sé todas las cosas que acostumbraba a saber. Veamos: cuatro por cinco, doce y cuatro por seis, trece… ¡Ay, Dios mío, así nunca llegaré a veinte!”

Nuestro tutor leyó este fragmento del capítulo 2 de la obra y nos preguntó si era posible que Alicia llegara a veinte siguiendo la lógica que estaba empleando para contar. Pero, ¿cuál era esa lógica? Tras dejarnos reflexionar durante unos minutos, y sin llegar a ninguna conclusión correcta, nos explicó que Alicia estaba contando en bases numéricas variables, así:

$$4 \cdot 5 = 12 \text{ en base } 18 \;(20 : 18 = 1 \text{ y sobran } 2)$$
$$4 \cdot 6 = 13 \text{ en base } 21 \;(24 : 21 = 1 \text{ y sobran } 3)$$

es decir, va saltando las bases de tres en tres y si seguimos esta lógica encontraremos que no puede llegar a 20 tal y como ella se temía:

$4 \cdot 7 = 14$ en base 24	$4 \cdot 10 = 17$ en base 33
$4 \cdot 8 = 15$ en base 27	$4 \cdot 11 = 18$ en base 36
$4 \cdot 9 = 16$ en base 30	$4 \cdot 12 = 19$ en base 39

Llegado este punto podríamos pensar que el siguiente término es:

$$4 \cdot 13 = 20 \text{ en base } 42$$

cosa que no es correcta, puesto que:

$$52 : 42 = 1 \text{ y sobran } 10 \Rightarrow 4 \cdot 13 = 110_{(42}$$

Además: $4 \cdot 13 = 20$ en base 26

y esto rompe la serie lógica comenzada por Alicia. ¡Por eso nunca llegará a 20!

Capítulo 9 MARZO: Una excursión llena de números

3. Le Corbusier y el número de oro.

Después de dos días de trabajar en la granja y convivir con los habitantes de Macondo, los profesores decidieron llevarnos a ver una exposición de Le Corbusier que había en una ciudad cercana. Las pinturas que pudimos ver no me inspiraron demasiado, sin embargo sus maquetas me dejaron sin habla. Definió la arquitectura como "el juego correcto y magnífico de los *volúmenes*[62] bajo la luz", y según nos contó el guía, el arquitecto se inspiró en las proporciones utilizadas por las civilizaciones clásicas, en las dimensiones estéticas de la sección áurea, y en las proporciones existentes en el cuerpo humano. Al preguntarle qué era eso de la sección áurea el guía nos explicó que desde la antigüedad, muchos filósofos, artistas y matemáticos se habían interesado por ella, y que incluso la fascinación de algunos escritores del renacimiento les llevó a denominarla “divina proporción” [...] Esta sección áurea (cuyo nombre se debe a su estrecha relación con el *número de oro*[65]) ha dado lugar a la elaboración de una *escala*[3], en la que se basan construcciones arquitectónicas tan famosas como la sede de las Naciones Unidas en Nueva York o incluso multitud de objetos de diseño, mobiliario y decoración.

Número de Oro [65]: se trata de un número irracional representado por la letra griega Φ (inicial de Fidias, escultor griego que lo utilizó muy a menudo en las proporciones de sus obras) y cuyo valor es $(1+\sqrt{5})/2$.

En realidad se obtiene como la solución positiva de la siguiente ecuación:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

A simple vista no llama nuestra atención, parece un simple número irracional más. Sin embargo veamos algunos ejemplos de su presencia en nuestra vida cotidiana [...]